Wykład IV Algebra

Macierze i wyznaczniki

Definicja: Macierz $n\times m,\ n,m\in Z$ na ciałem K - tablica liczb z ciała K.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},\quad a_{ij}\in K,\quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m \end{matrix}\quad ,$$

Działania na macierzach

Dodawanie:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$A+B\overset{def}{=}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix},$$

Grupa abelowa.

Mnożenie przez liczbę:

$$\alpha A\overset{def}{=}\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Dodawanie macierzy i mnożenie przez liczbę - przestrzeń wektorowa.

Mnożenie macierzy:

$$a_{ij}\in K,\quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m \end{matrix}\quad ,\quad b_{ij}\in\quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,p \end{matrix}$$

$$c_{ij}\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\ .$$

Liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej. Zwykle mnożymy macierze kwadratowe i nimi dalej się zajmujemy.

Łączność mnożenia macierzy: $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)c_{jl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}c_{jl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_{jl}\right).$

Element neutralny mnożenia: $A \cdot I = I \cdot A = A$ - macierz jednostkowa:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$ - delta Kroneckera.

Macierz transponowana: $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$ - kolumny zamieniamy na wiersze, a wiersze na kolumny

Macierz odwrotna: $A \cdot A^{-1} = A^{1} \cdot A = I$

Przykład: Macierze 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \neq 0$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad ad - bc \neq 0$$

Istnienie macierzy odwrotnej wymaga spełnienia określonego warunku (dalej pokażemy, że tym warunkiem jest $\det A \neq 0$), więc macierze nie tworzą w ogólności grupy względem mnożenia.

Przykład cd.

Układu równań $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ można zapisać w macierzowej postaci jako

$AX=E$, gdzie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, a rozwiązanie zaś jako

$$X=A^{-1}E=\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} de-bf \\ -ce+df \end{pmatrix}.$$

Permutacje

Definicja: Permutacja - bijekcja skończonego zbioru w siebie

$$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\to\{x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\}.$$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Przykład: Permutacja 5-cio elementowego zbioru

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Definicja: Transpozycja - permutacja polegająca na przestawieniu tylko dwóch elementów zbioru X tzn. $\exists i,j \quad \sigma(i)=j\wedge\sigma(j)=i$ oraz $\forall k\neq i,j \quad \sigma(k)=k$.

Przykład:

$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - dokonano tutaj transpozycji 1 i 2.

Twierdzenie: Każdą permutację można przedstawić jako złożenie transpozycji

Dowód indukcyjny pomijam.

Rozkład permutacji na transpozycje nie jest jednoznaczny.

Twierdzenie: Każdą permutację można przedstawić jako złożenie parzystej <u>albo</u> nieparzystej liczby transpozycji.

Dowód indukcyjny pomijam.

Definicja: <u>Permutacja parzysta</u> - złożenie parzystej liczby transpozycji.

Definicja: <u>Permutacja nieparzysta</u> - złożenie nieparzystej liczby transpozycji.

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} +1 & -\text{permutacja parzysta} \\ -1 & -\text{permutacja nieparzysta} \end{cases}$$

Definicja: <u>Wyznacznik macierzy</u> $n \times n$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\det A \overset{def}{=} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Iloczyn zawiera po jednym wyrazie z każdego wiersza i każdej kolumny, suma przebiega po wszystkich permutacjach drugiego indeksu.

Przykład: Macierz 2×2, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Przykład: Macierz 3×3, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,.$$

Własności wyznaczników

1) $\det A = \det A^T$

$$\det A \overset{def}{=} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} \quad \Rightarrow \quad \det A^T = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\ldots a_{\sigma(n)n}$$

2) Wniosek z 1): własności wyznaczników dotyczące kolumn macierzy dotyczą automatycznie wierszy.

Macierz A zapisujemy jako $(A_1, A_3, A_3, \cdots, A_n)$, A_i - i-ta kolumna

3)
$$\det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_{i-1}, A_i + A'_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$
$$= \det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) + \det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_{i-1}, A'_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

4) $\det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_{i-1}, \lambda A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) = \lambda \det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)$

5) wniosek z 4): $\det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_{i-1}, A_i = 0, A_{i+1}, \ldots, A_n) = 0$
wyznacznik znika jeśli choć jedna kolumna jest zerowa.

6) $\det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = -\det(A_1, A_3, A_3, \ldots, A_k, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$
wyznacznik zmienia znak przy zamianie miejscami kolumn.

7) wniosek z 5) $\det(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i = A_{k\neq i}, \ldots, A_n) = 0$
wyznacznik znika jeśli dwie kolumny są sobie równe.

<u>Wykład IV cd.</u> Algebra

<u>Twierdzenie:</u> Jeśli jedna kolumna macierzy jest kombinacją liniową pozostałych, to wyznacznik takiej macierzy znika.

<u>Dowód:</u> Niech $A = (A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$ i $A_1 = \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \ldots + \alpha_n A_n$

$$\det(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n) = \det(\alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \ldots + \alpha_n A_n, A_2, A_3, \ldots, A_n)$$

$$= \alpha_2 \det(A_2, A_2, A_3, \ldots, A_n) + \alpha_3 \det(A_3, A_2, A_3, \ldots, A_n) + \ldots + \alpha_n \det(A_n, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0$$

bo w każdym wyznaczniku powtarza się jedna kolumna, a taki wyznacznik znika.

<u>Wniosek:</u>

$$\det(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, A_2, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$$

Dowód

$$\det(A_1, A_2, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \det(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$$
$$+ \underbrace{\det(A_1, A_2, \ldots, \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n)}_{=0}$$

<u>Twierdzenie:</u> (Cauchy'ego) $\det AB = \det A \det B$.

<u>Dowód:</u>

$$\det AB = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, (AB)_{\sigma(1)1} (AB)_{\sigma(2)2} \ldots (AB)_{\sigma(n)n} =$$

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1\sigma(1)} \right) \left(\sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} b_{k_2\sigma(2)} \right) \ldots \left(\sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} b_{k_n\sigma(n)} \right) =$$

Wyznacznik $\det(B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n})$ jest różny od zera tylko wtedy, gdy żadna z kolumn nie powtarza się, czyli zbiór indeksów $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ odpowiada permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tzn. $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$. A zatem

$$\det(B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}) = \det(B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \ldots, B_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma \det(B_1, B_2, \ldots, B_n) = \operatorname{sgn}\sigma \det B.$$

Ostatecznie dostajemy: $\det AB = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}\sigma \det B = \det A \det B$.

Rozwinięcie Laplace'a

Definicja: Minor M_{ij} macierzy *A,* to wyznacznik macierzy powstałej z macierzy *A* po wykreśleniu z niej *i*-tego wiersza i *j*-tej kolumny.

Przykład: Mamy macierz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Minor M_{21}, to

$$M_{21} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{32}.$$

Definicja: Dopełnienie algebraiczne A_{ij} elementu a_{ij} macierzy *A*: $A_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Przykład: Mamy macierz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{12}a_{23} + a_{13}a_{32}.$$

Twierdzenie: (o rozwinięciu Laplace'a). Niech *A* będzie macierzą $n \times n$.
Zachodzi wówczas równość

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ jest rozwinięciem wyznacznika macierz *A* względem *j*-tej kolumny.

<u>Dowód:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}\sigma' \, a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{(i-1)\sigma'(i-1)} a_{(i+1)\sigma'(i+1)} \cdots a_{n\sigma'(n)} , \qquad (*)$$

gdzie σ' oznacza permutację zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, z którego usunięto liczbę *i*, w zbiór $\{1,2,\ldots,n\}$, z którego usunięto liczbę *j*. Porównajmy teraz wyrażenie (*) z definicją wyznacznika macierzy *A* tzn.

$$\det A \overset{def}{=} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} . \qquad (**)$$

Widzimy, że zachodzi równość miedzy (*) i (**), jeśli parzystość permutacji σ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ zmienia się o czynnik $(-1)^{i+j}$, w stosunku do permutacji σ' zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, z którego usunięto liczbę *i*, w zbiór $\{1,2,\ldots,n\}$, z którego usunięto liczbę *j*. Aby to wykazać rozpatrujemy permutacje σ i σ'

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(i) = j & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(i-1) & \sigma(i+1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Usunięcie liczby i i $\sigma(i) = j$ oraz zamianę permutacji σ w permutację σ', można dokonać ustawiając liczby i i $\sigma(i) = j$ na samym początku (albo samym końcu) wierszy, w których występują. Wówczas liczby te nie będą grały żadnej roli, przy wykonywaniu transpozycji w celu obliczenia parzystości σ'. Takie ustawienie liczby i wymaga $(i-1)$ transpozycji, a żeby zaś ustawić liczbę j na początku wiersza potrzeba $(j-1)$ transpozycji. Razem musimy wykonać $(i+j-2)$ transpozycji, czyli parzystość zmienia się o czynnik $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. Gdybyśmy liczby i i $\sigma(i) = j$ chcieli ustawić na samym końcu odpowiednich wierszy, wtedy musielibyśmy wykonać, odpowiednio, $(n-i)$ i $(n-j)$ transpozycji. Parzystość permutacji σ w stosunku do permutacji σ', zmieniłaby się, jak poprzednio, o czynnik $(-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}$.

Przykład: Mamy macierz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ i dokonujemy rozwinięcia względem pierwszej kolumny.

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie: Jeśli macierz ma postać $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, gdzie A i B są macierzami kwadratowymi, a 0 oznacza macierz zerową to

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B \ .$$

Dowód indukcyjny:

Prawdziwość twierdzenia, gdy $A_{(1)}$ jest macierzą 1×1 wynika natychmiast ze wzoru na rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny. Łatwo również sprawdzić wzór, gdy $A_{(2)}$ jest macierzą 2×2. Zakładamy teraz, że twierdzenie zachodzi dla $A_{(k)}$ będącej macierzą $k \times k$. Jeśli $A_{(k+1)}$ jest macierzą $(k+1) \times (k+1)$, to przeprowadzając rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny mamy

$$\det \begin{pmatrix} A_{(k+1)} & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = a_{11} A_{(k)}^{11} \det B + a_{21} A_{(k)}^{21} \det B + \ldots + a_{(k+1)1} A_{(k)}^{(k+1)1} \det B = \det A_{(k+1)} \det B \, .$$

Ostatnia równość zachodzi na mocy twierdzenia o rozwinięciu Laplace'a.

Wykład IV cd. Algebra

Macierz odwrotna

Definicja: Macierz A^{-1} nazywa się macierzą odwrotną do A, jeśli

$$A \cdot A^{-1} = A^{1} \cdot A = I \ .$$

Zbiór macierzy odwracalnych tworzy grupę (nieprzemienną) względem mnożenia.

Twierdzenie: Jeśli macierz A ma odwrotną (jest odwracalna), to $\det A \neq 0$.

Dowód: $\det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \wedge \quad \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Twierdzenie: Macierz odwrotna do A ma postać $\left(A^{-1}\right)_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$ (uwaga na kolejność indeksów), gdzie A_{ji} jest dopełnieniem algebraicznym macierzy A.

Dowód:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(A^{-1}\right)_{ij} a_{jk} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} a_{jk} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\det A} \det A = 1\,, & i = k \\ 0\,, & i \neq k \end{array} \right\} = \delta^{ik}$$

Aby wyjaśnić przypadek $i \neq k$, rozważmy sytuację, gdy $i = 1, j = 2$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^{n} A_{j1} a_{j2} = A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \ldots + A_{n1}a_{n2} =$$

$$(-1)^{1+1} a_{12} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ (-1)^{1+n} a_{n2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

W ostatniej macierzy pierwsza kolumna równa jest drugiej. W ogólności, jeśli $i \neq k$ to $\sum_{j=1}^{n} A_{ji} a_{jk}$ reprezentuje wyznacznik macierzy, której i-ta kolumna równa jest k-tej, a taki wyznacznik znika.

Z twierdzenia wynika, że $\det A \neq 0$ jest nie tylko warunkiem <u>koniecznym</u>, ale i <u>dostatecznym</u> odwracalności macierzy, czyli macierz A jest odwracalna, wtedy i tylko wtedy gdy $\det A \neq 0$.

Przykład: Macierze 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = ad - bc, \quad A_{11} = d, \quad A_{12} = -c, \quad A_{21} = -b, \quad A_{22} = a,$$

$$ad - bc \neq 0 \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$