Analiza Matematyczna

Akademia Świętokrzyska, Instytut Fizyki, 2006-2007

Wojciech Broniowski

Mini-kompendium pochodnych i całek

Niniejsze notatki wyjaśniają intuicyjnie i po krótce czym jest pochodna i całka. Te podstawowe wiadomości potrzebne są dla śledzenia równoległego wykładu z fizyki, natomiast cały poniższy materiał zostanie systematycznie, ściśle i dużo szerzej wyłożony w dalszym kursie analizy matematycznej.

1 Pochodna funkcji w punkcie

Rozważmy funkcję $f : R \to R$, tj. funkcję przyporządkowującą liczbie rzeczywistej liczbe rzeczywistą. Zakładamy, że funkcja ta jest na tyle gładka (poznamy niebawem, co to matematycznie oznacza), że wszystkie wzory w tych notatkach mają sens. Weźmy na przykład $f(x) = x^2$ i rozważmy dowolny *ustalony* punkt x_0 oraz punkt $x_1 = x_0 + \Delta x$, gdzie $\Delta x = x_1 - x_0$ jest różnicą x_1 i x_0. **Ilorazem różnicowym** nazywamy wielkość

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Na przykład dla $f(x) = x^2$ iloraz różnicowy w punkcie x_0 wynosi

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}.$$

Następnie bierzemy *coraz mniejsze* Δx, czyli coraz bliższe sobie punkty x_1 i x_0. Taką procedurę nazywamy **granicą** i oznaczamy jako $\lim_{\Delta x \to 0}$ lub $\lim_{x_1 \to x_0}$.

Pochodna funkcji w punkcie x_0, oznaczona jako $f'(x_0)$, to z definicji następująca granica ilorazu różnicowego:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jako przykład policzmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 1$. Iloraz różnicowy wynosi

$$\frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

W wyniku pojawiła się suma liczby 2 oraz Δx. Następnie, zgodnie z definicją pochodnej, bierzemy coraz to mniejsze Δx, czyli $\lim_{\Delta x \to 0}$. Powoduje to, że przyczynek Δx na końcu powyższego równania jest w oczywisty sposób coraz mniejszy, tj. dąży do zera i możemy go zaniedbać. Z pomocą symbolu granicy piszemy więc

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2,$$

tj. pochodna funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 1$ wynosi 2, czyli $f'(1) = 2$.

Właśnie policzyliśmy pochodną w punkcie $x_0 = 1$, ale oczywiście możemy ją policzyć w dowolnym punkcie x. **Funkcją pochodną** lub w skrócie **pochodną** funkcji (a nie pochodną funkcji *w punkcie*) nazywamy funkcję, która danemu punktowi $x \in R$ przyporządkowuje wartość pochodnej funkcji f w punkcie x. W naszym przykładzie pochodna funkcji w dowolnym punkcie x wynosi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

Zatem funkcja pochodna dla funkcji $f(x) = x^2$ to funkcja $f'(x) = 2x$.

Notacja: piszemy równoważnie dla funkcji pochodnej

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = df(x)/dx = df/dx = \frac{d}{dx} f(x) = f_x(x) = f^{(1)}(x),$$

oraz dla pochodnej w punkcie x_0

$$f'(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = f_x(x_0).$$

Zalecaną notacją jest $\frac{df(x)}{dx}$. Pochodną po czasie t oznaczamy niekiedy (za Newtonem) jako $\dot{f}(t)$.

Obliczanie pochodnych nazywamy **różniczkowaniem**.

2 Interpretacja geometryczna

Rys. 1 pokazuje interpretację graficzną pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jako tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu $f(x)$ w punkcie x_0,

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha.$$

3 Funkcja pierwotna, czyli całka nieoznaczona

Funkcją pierwotną do funkcji $f(x)$ nazywamy taką funkcję $F(x)$, dla której

$$F'(x) = f(x).$$

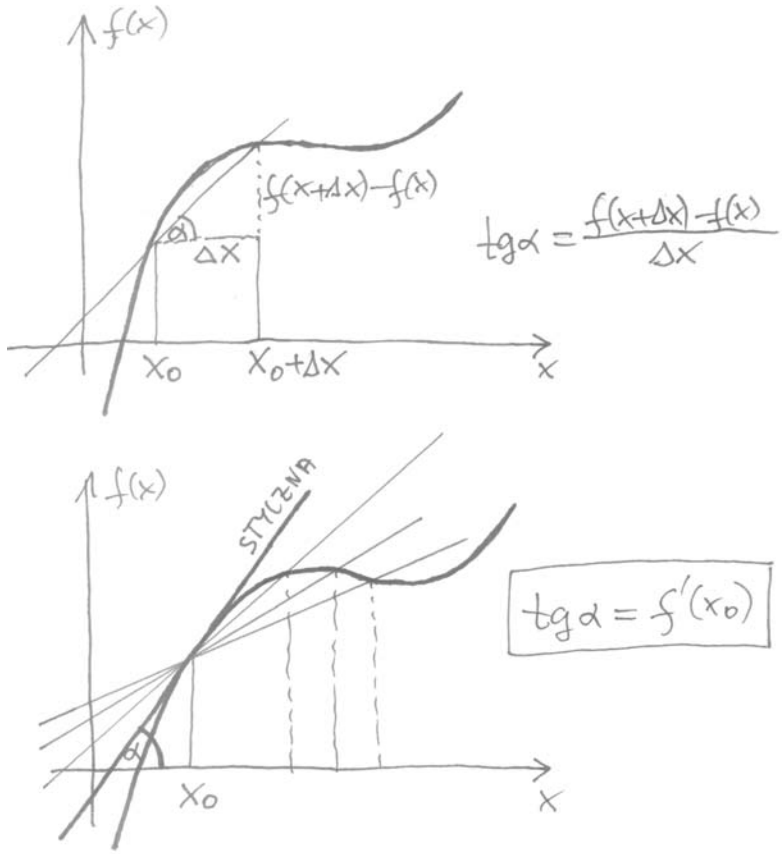
Na przykład dla $f(x) = 2x$ mamy przez odgadnięcie $F(x) = x^2 + C$, gdzie C jest dowolną stałą. Istotnie, łatwo sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + C - x^2 - C}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

Funkcję $F(x)$ nazywamy też **całką nieoznaczoną** (synonim funkcji pierwotnej) i zapisujemy jako

$$F(x) = \int dx f(x) = \int f(x) dx = \int f dx.$$

Znajdowanie całki nieoznaczonej (całkowanie) jest operacją odwrotną do różniczkowania. Istotny jest fakt, że funkcja pierwotna wyznaczona jest z dokładnością do stałej, tj. zawsze możemy do $F(x)$ dodać dowolną stałą.



Rysunek 1:

4 Całka oznaczona

Rozważmy wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$, jak na Rys. 2. Definicja geometryczna: *całką oznaczoną* nazywam sumę pól między wykresem dla $f(x) > 0$ a osią x (zaznaczone jako $+$) minus sumę pól między wykresem dla $f(x) < 0$ a osią x (zaznaczone jako $-$). Całką oznaczoną oznaczam symbolem

$$\int_a^b f(x)dx,$$

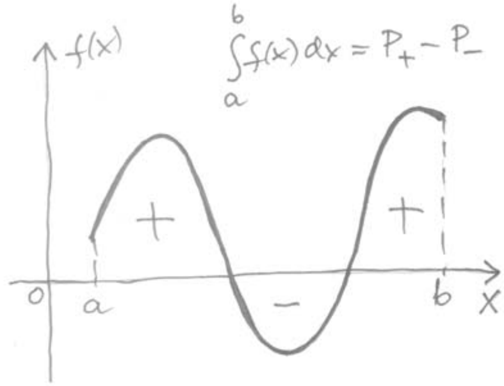
gdzie a nazywamy górną a b dolna granicą całkowania. Zmienna x nazywa się zmienną całkowania. Weźmy teraz dowolny punkt $z \in [a, b]$ i rozważmy tzw. **funkcję górnej granicy całkowania**,

$$G(z) = \int_a^z f(x)dx.$$

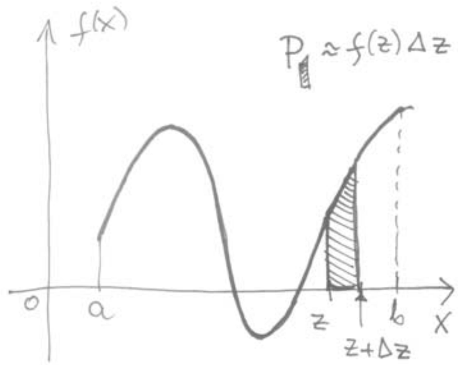
Jak widać z Rys. 3,

$$\frac{dG(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{G(z + \Delta z) - G(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\text{pole zakreskowanego trapezu}}{\Delta z} = \dots$$

Pole zakreskowanego trapezu to, jak pamiętamy z geometrii, $\frac{1}{2}\Delta z(f(z) + f(z + \Delta z)$. W granicy $\Delta z \to 0$ mamy zatem $\lim_{\Delta z} \frac{1}{2}(f(z) + f(z + \Delta z) = f(z)$, a więc pole zakreskowanego trapezu



Rysunek 2:



Rysunek 3:

dąży do $\Delta z f(z)$. Kontunuując przerwany rachunek, dostajemy

$$\ldots = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)\Delta z}{\Delta z} = f(z).$$

Tak więc $G'(z) = f(z)$, tj. funkcja górnej granicy całkownia jest funkcją pierwotną do $f(z)$, czyli $G(z) = F(z)$, a co za tym idzie dla $z = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + C.$$

Nie jest to jeszcze pełny wynik, bo funkcja pierwotna wyznaczona jest z dokładnością do stałej C. Stałą tę wyznaczamy z warunku

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

co jest oczywiste, bo dla $b = a$ pole pod wykresem wynosi 0 (nie mamy żadnej figury). Z drugiej strony

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C,$$

zatem $F(a) + C = 0$, czyli $C = -F(a)$ i ostatecznie

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

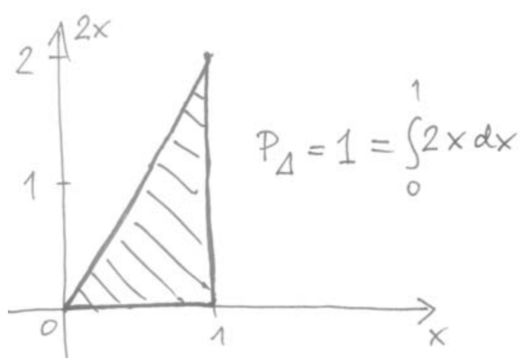
Jest to tzw. **podstawowe twierdzenie rachunku całkowego**. Częsty zapis to powyższego wzoru to

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{x=a}^b = F(x)|_a^b .$$

Procedura obliczania całki oznaczonej polega więc na obliczeniu całki nieoznaczonej i wzięcia jej różnicy między górną i dolną granicą całkowania. Zauważmy też, że zmienna całkowania x nie wystepuje w wyniku (jest "ślepa") i możemy x zastapić dowolnym innym symbolem: t, z, x', itd.

Przykład: policzmy pole trójkąta z Rys. 4. Mamy $f(x) = 2x$, dla której jak pamiętamy $F(x) = x^2 + C$.

$$\int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1. \tag{1}$$



Rysunek 4: